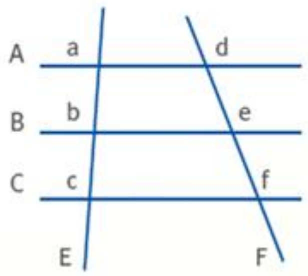
TRABAJO PRÁCTICO DE DIAGNÓSTICO

El trabajo que aquí se presenta es a modo de repaso para que sea realizado en las clases del 25 y 27 de marzo. Se presenta teoría y práctica para que los estudiantes tengan dónde consultar al momento de realizar las actividades.
RECORDAR que deben enviar todas las actividades de los dos trabajos prácticos antes del 31 de marzo para su corrección. Cualquier consulta podrán comunicarse con la docente a través del mail.

- **TEOREMA DE THALES**

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de las medidas de los segmentos determinados en una de ellas es igual a la razón de las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra.



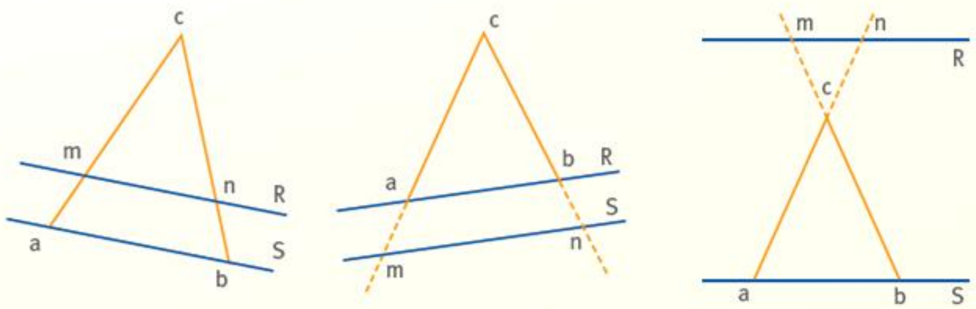
A // B // C
E y F transversales.

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{de}}{\overline{ef}}$$

Al $\overline{ab}$ le corresponde el $\overline{de}$ en la otra transversal. Se dice entonces que son **segmentos correspondientes**.

Como **consecuencia del teorema de Thales**, toda recta paralela al lado de un triángulo que interseque a los otros dos lados o a sus prolongaciones, determina sobre estos **segmentos proporcionales.**

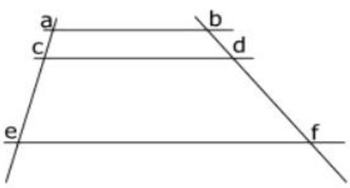
R // S



$$\frac{\overline{ac}}{\overline{mc}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{nc}} \qquad \frac{\overline{ma}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{nb}}{\overline{bc}} \qquad \frac{\overline{ac}}{\overline{cn}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{cm}}$$

Ejemplo: Vamos a ver como funciona el teorema de Thales con un ejemplo:

Supongamos que tenemos el siguiente gráfico: Hallar $\overline{df}$



Datos:

$$\begin{cases} \overline{ab} \;//\; \overline{cd} \;//\; \overline{ef} \\ \overline{ac} = 2 \text{ cm} \\ \overline{ce} = 6 \text{ cm} \\ \overline{bd} = 3 \text{ cm} \\ \overline{df} = ??? \end{cases}$$

Podemos entonces plantear la fórmula de Thales: $\frac{\overline{ac}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{df}}$

Remplazamos los valores que conocemos, y al que queremos calcular, "lo llamamos" X:

$$\frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{6 \text{ cm}}{X} \Rightarrow \frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} \times \frac{6 \text{ cm}}{X} \Rightarrow 2\text{cm} \cdot X = 3\text{cm} \cdot 6\text{cm} \Rightarrow X = \frac{18 \text{ cm}^2}{2 \text{ cm}} \Rightarrow X = \frac{\cancel{18}^{\,9} \cancel{\text{cm}^2}}{\cancel{2}_{\,1} \cancel{\text{cm}}} \quad \boxed{= 9 \ cm}$$

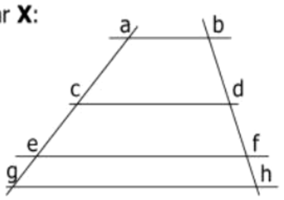
Multiplico miembro a miembro "cruzado"

Despejo X

Simplifico el 18 con el 2 y el cm² con el cm.

Otro ejemplo: Ahora, en vez de tener datos concretos, tenemos una incógnita que llamaremos, en este caso, x

Y el ejercicio es hallar **X**:



Datos: $\begin{cases} \overline{ab} \,//\, \overline{cd} \,//\, \overline{ef} \,//\, \overline{gh} \\ \overline{ac} = X+2 \\ \overline{cg} = X+5 \\ \overline{bd} = 2 \\ \overline{dh} = 4 \end{cases}$

Empezamos escribiendo una proporción: *(una proporción que involucre los datos que tengo)* $\Rightarrow \dfrac{\overline{ac}}{\overline{cg}} = \dfrac{\overline{bd}}{\overline{dh}}$

Remplazamos los valores $\dfrac{X+2}{X+5} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow \dfrac{X+2}{X+5} \times \dfrac{2}{4} \Rightarrow 4\cdot(X+2) = 2\cdot(X+5)$

Acá usamos la propiedad fundamental de las proporciones numéricas: **"El producto de los medios es igual al producto de los extremos"** (Que sería esa multiplicación "cruzada" lo que nos hace mas simple poder despejar x)

Sigamos:

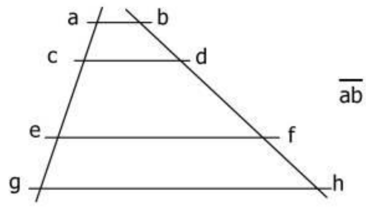
$4\cdot(X+2) = 2\cdot(X+5) \Rightarrow 4X+8 = 2X+10 \Rightarrow 4X-2X = 10-8 \Rightarrow 2X = 2 \Rightarrow \boxed{X=1}$

Distributiva

Las "X" de un lado
Los números del otro

Actividad 1: Hallar el valor de la incógnita y la medida de los segmentos.

El siguiente gráfico es la referencia para resolver los ejercicios que están a continuación. Los ejercicios son independientes uno de otros.



$\overline{ab} \,//\, \overline{cd} \,//\, \overline{ef} \,//\, \overline{gh}$

a) $\begin{cases} \overline{ae} = 8X+1\text{cm} \\ \overline{eg} = 5X-2\text{cm} \\ \overline{bf} = 12\text{cm} \\ \overline{fh} = 4\text{cm} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \overline{ce} = X+1 \text{ cm} \\ \overline{cg} = 2X-2 \text{ cm} \\ \overline{df} = 14 \text{ cm} \\ \overline{fh} = 6 \text{ cm} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \overline{ae} = \frac{3}{7}X+1cm \\ \overline{eg} = \frac{1}{2}X-1{,}5cm \\ \overline{bf} = 6 \text{ cm} \\ \overline{fh} = 3 \text{ cm} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \overline{ce} = \frac{3}{8}X+1 \text{ cm} \\ \overline{ag} = \frac{1}{2}X+6 \text{ cm} \\ \overline{df} = 6 \text{ cm} \\ \overline{bh} = 15 \text{ cm} \end{cases}$

Actividad 2: ¡Para pensar!

"El matemático Thales de Mileto logró medir la altura de una de las pirámides de Egipto, teniendo como dato la sombra de la pirámide, su altura y la sombra que su cuerpo proyectaba".

Tener en cuenta los datos, realizar un esquema de la situación y calcular la altura de la pirámide.

- Altura de Thales: 1,72 m.
- Longitud de la sombra de la pirámide: 63,66 m.
- Longitud de la sombra de Thales: 0,75 m.

- **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

Existen distintos métodos que permiten resolver un sistema de ecuaciones lineales. Nosotros haremos un repaso sobre los métodos vistos el año pasado:

- Método de Sustitución.
- Método de Igualación.
- Método gráfico.

- **Método de Sustitución:** Para poder aplicar este método debemos seguir los siguientes pasos:
    1. **Despejar** una de las incógnitas (x e y) en una de las dos ecuaciones.
    2. **Sustituirla** en la otra ecuación.
    3. **Resolver** la ecuación que nos queda.
    4. Con el resultado obtenido en el punto 3, reemplazo en una de las ecuaciones originales y hallo la incógnita que falta.

Veamos un ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de sustitución: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

1. DESPEJAR una incógnita en una ecuación:

$\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases} \Longrightarrow$ Tomamos la primera ecuación y despejamos **X** $\Longrightarrow$ $2X + 3Y = 7$; $2X = 7 - 3Y$ (Paso Restando "3Y")

(Elegimos la primera ecuación para despejar X porque sí. Pudimos haber despejado "Y" de la segunda ecuación o "Y" de la primera, etc.)

$\boxed{X = \dfrac{7-3Y}{2}}$ Paso Dividiendo el "2"

Listo, Primer paso hecho!

2. SUSTITUIR:

$\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases} \Longrightarrow$ En la otra ecuación, en donde dice X, lo sustituimos por lo que despejamos en el paso anterior, es decir reemplazamos X por: $\dfrac{7-3Y}{2}$

$5\boxed{X} - Y = 9 \Longrightarrow$ SUSTITUYO "**X**" por $\dfrac{7-3Y}{2} \Longrightarrow 5\left(\dfrac{7-3Y}{2}\right) - Y = 9$

3. RESOLVER la ecuación que nos quedó:

$$5\cdot\left(\frac{7-3Y}{2}\right) - Y = 9 \xRightarrow{\text{Propiedad Distributiva}} \frac{35-15Y}{2} - Y = 9 \xRightarrow{\text{Paso la "Y" Sumando}} \frac{35-15Y}{2} = 9 + Y \xRightarrow{\text{Paso el "2" multiplicando}} 35 - 15Y = (9 + Y)\cdot 2$$

$$\xRightarrow{\text{Propiedad Distributiva con el "2"}} 35 - 15Y = 18 + 2Y \xRightarrow{\text{Las "Y" de un lado y los números del otro}} -15Y - 2Y = 18 - 35 \Longrightarrow -17Y = -17 \Longrightarrow Y = \frac{-17}{-17} \Longrightarrow \boxed{Y = 1}$$

4. HALLAR el valor de la otra incógnita: Tomamos una (cualquiera) de las dos ecuaciones: $2X + 3Y = 7$

Reemplazamos "Y" por "1": $2X + 3 \,.\, 1 = 7$ Y resolvemos.....

$$2X + 3 = 7 \Longrightarrow 2X = 7 - 3 \Longrightarrow X = \frac{4}{2} \Longrightarrow \boxed{X = 2}$$

- **Método de Igualación:** Para poder aplicar este método, deben seguirse los siguientes pasos:
    1. **Despejar la incógnita** (cualquiera de las dos, es decir x o y) **en las dos ecuaciones.**
    2. **Igualar** las dos incógnitas despejadas.
    3. **Resolver** la ecuación que nos queda.
    4. **Hallar** la otra incógnita.

Veamos un ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el Método de Igualación: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

1. DESPEJAR una incógnita en las dos ecuaciones: (puede ser X o Y pero tiene que ser la misma en las dos)

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$$

$5X - Y = 9$

$5X = 9 + Y$

$\boxed{X = \dfrac{9+Y}{5}}$

$2X + 3Y = 7$

$2X = 7 - 3Y$

$\boxed{X = \dfrac{7-3Y}{2}}$

2. IGUALAR: Al ser las dos expresiones iguales a "x", decimos que también son iguales entre sí...

Por lo tanto nos quedaría: $\dfrac{9+Y}{5} = \dfrac{7-3Y}{2}$ Y como vemos igualando, nos queda una sola ecuación con una sola incógnita.

3. RESOLVER la ecuación que nos quedó:

Seguimos resolviendo: $\dfrac{9+Y}{5} = \dfrac{7-3Y}{2} \xrightarrow{\text{Paso multiplicando los dos denominadores}} 2\,.\,(9+Y) = 5\,.\,(7-3Y) \xrightarrow{\text{Distributiva}} 18 + 2Y = 35 - 15Y$

Las **"Y"** de un lado los números de otro. $\Rightarrow 15Y + 2Y = 35 - 18 \Rightarrow 17Y = 17 \Rightarrow Y = \dfrac{17}{17} \Rightarrow \boxed{Y = 1}$

4. HALLAR el valor de la otra incógnita:

Tomamos una (cualquiera) de las dos ecuaciones originales: $2X + 3Y = 7$

Reemplazamos Y por 1: $2X + 3\,.\,1 = 7 \Rightarrow 2X + 3 = 7 \Rightarrow 2X = 7 - 3 \Rightarrow X = \dfrac{4}{2} \Rightarrow \boxed{X = 2}$

- **Método Gráfico:** Para poder utilizar este método, tenemos que despejar de ambas ecuaciones la variable y, para que nos quede $y = mx + b$.

Vamos a ver como se grafica estudiando nuestro ejemplo: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$

$5X - Y = 9$

$-Y = 9 - 5X$

$Y = \dfrac{(9-5X)}{-1}$

$\boxed{Y = 5X - 9}$

$2X + 3Y = 7$

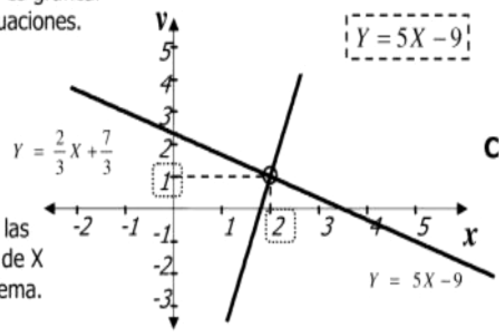
$3Y = 7 - 2X$

$Y = \dfrac{(7-2X)}{3}$

$\boxed{Y = -\dfrac{2}{3}X + \dfrac{7}{3}}$

Primero despejamos "Y" en las 2 ecuaciones.
Esto es para dibujar las rectas como: Y = ax + b

Ahora lo que vamos a hacer es graficar cada una de estas dos ecuaciones.



El punto de intersección de las rectas tiene las coordenadas de X e Y que son solución del Sistema.

Como vemos, la solución es:

X = 2

Y = 1

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden clasificarse teniendo en cuenta el tipo de solución encontrada:

- **Sistema Compatible Determinado (SCD):** Solución única (en el método gráfico, las rectas se cortan en un **único** punto).
- **Sistema Compatible Indeterminado (SCI):** Infinitas soluciones (en el método gráfico, las rectas **coinciden**).
- **Sistema Incompatible (SI):** No tiene solución (en el método grafico, las rectas **nunca** se cortan).

Actividad 1: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando un método distinto en cada uno de los casos. No olvides escribir la solución y clasificar.

a) $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 9x + 4y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x - y = -1 \\ 5x + 4y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 10y = 4 \\ -x - 3y = 3 \end{cases}$

Actividad 2: Unir con flechas cada sistema de ecuaciones lineales con el gráfico que le corresponde según su resolución.

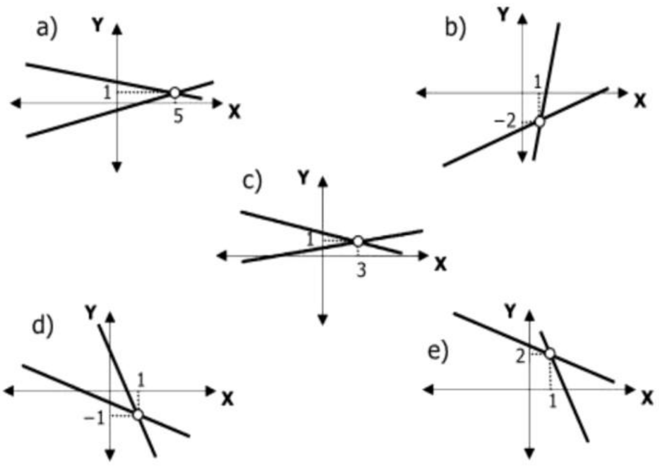
$\begin{cases} -1X + 2Y = -1 \\ 3X + 4Y = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} 5X + Y = 4 \\ -X - 2Y = 1 \end{cases}$

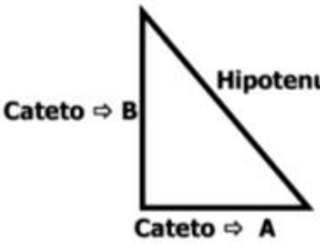
$\begin{cases} X + 5Y = 10 \\ -2X + 7Y = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3X - 4Y = 11 \\ -11X + 2Y = -15 \end{cases}$

$\begin{cases} 3X + Y = 5 \\ -2X - 3Y = -8 \end{cases}$



- **Repaso del Teorema de Pitágoras**:



El teorema de Pitágoras dice:
" La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa "

La Hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto. (siempre es el lado más largo del triángulo)

$$A^2 + B^2 = H^2$$

Los catetos son los dos lados que forman el ángulo recto

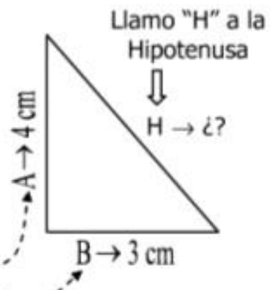
Como vemos es sólo una fórmula, y nos sirve para calcular el tercer lado de un triángulo rectángulo, sabiendo cuanto valen los dos primeros!

Hay que acordarse que, el teorema de Pitágoras, <u>sólo se puede usar con triángulos rectángulos</u>.

Vamos a ver un ejemplo:

Supongamos que tenemos como dato que un cateto mide 3 cm y el otro cateto mide 4 cm. Y <u>tenemos que calcular la hipotenusa</u>

Si dibujamos el triángulo que dice el enunciado nos quedaría como este: ⇨



Lo primero que hago es plantear la fórmula de Pitágoras: $A^2 + B^2 = H^2$

Luego, remplazo los valores que tengo como dato:

(En este caso, tenemos como dato, los dos catetos)

Entonces remplazo un cateto por 4 cm y el otro por 3 cm

$$(3\ cm)^2 + (4\ cm)^2 = H^2$$

Hago las cuentas

$$9\ cm^2 + 16\ cm^2 = H^2$$

Sumo 9 + 16

$$25\ cm^2 = H^2$$

Paso el cuadrado como Raíz

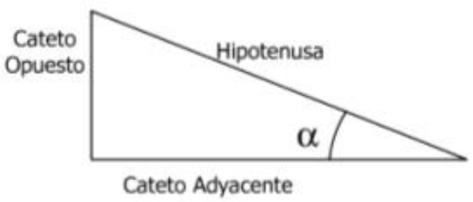
$$\sqrt{25\ cm^2} = H$$

☆ $\boxed{5\ cm = H}$

Por lo tanto ya calculamos la hipotenusa: Nos dio 5 cm

- **La Trigonometría es la parte de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.**

☆ *Primero vamos a estudiar los **Triángulos Rectángulos***



- Llamamos Hipotenusa al lado más grande del triángulo.
- Llamamos Cateto Opuesto al lado Opuesto al ángulo α.
- Llamamos Cateto Adyacente al lado Adyacente al ángulo α.

A partir de estos tres lados y este ángulo surgen tres relaciones muy importantes:

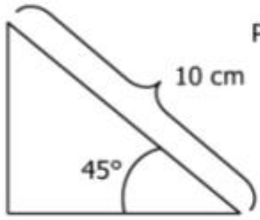
$$\textbf{Seno}\ \alpha = \frac{Cateto\ \ Opuesto}{Hipotenusa} \qquad \textbf{Coseno}\ \alpha = \frac{Cateto\ \ Adyacente}{Hipotenusa} \qquad \textbf{Tangente}\ \alpha = \frac{Cateto\ \ Opuesto}{Cateto\ \ Adyacente}$$

☆ Notar que sólo estamos utilizando el caso positivo, ya que estamos trabajando con medidas de longitud.

¿Para qué me sirven esas tres fórmulas? Esas tres fórmulas son muy útiles, si para cualquier triángulo rectángulo yo tengo como datos un lado y un ángulo, puedo calcular los otros dos lados usando dichas fórmulas. Y si tengo como dato el valor de dos lados puedo calcular los ángulos y el lado que falta.

Veamos un ejemplo:

En este ejemplo tenemos como dato un ángulo y un lado, y vamos a calcular los otros dos lados del triángulo.



Planteamos la fórmula del Seno

$$\textbf{Seno } \alpha = \frac{\textit{Cateto Opuesto}}{\textit{Hipotenusa}}$$

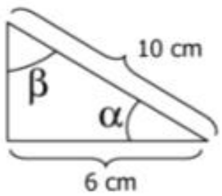
- Primero reemplazo los valores que conozco (la hipotenusa y el ángulo α). $\Rightarrow$ $\text{Seno } 45° = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{10\,\text{cm}}$

Luego despejo el Cateto Opuesto que es lo que voy a calcular. $\Rightarrow$ $\text{Seno } 45° \cdot 10\text{ cm} = \text{Cateto Opuesto}$

Ahora con la calculadora calculo el Seno de 45°. $\Rightarrow$ $\text{Seno } 45° = 0{,}707$

$\Rightarrow$ Cateto Opuesto = 7,07 cm

Veamos un ejemplo en el que calculemos un ángulo:



En este ejemplo tenemos como dato dos lados, y vamos a calcular los ángulos del triángulo.

Obviamente que ya sabemos que uno de los ángulos vale 90º . Si no fuera así no podríamos usar las fórmulas de Trigonometría que vimos antes.

Planteamos la fórmula del Coseno: $\Rightarrow$ $\text{Coseno } (\alpha) = \dfrac{\textit{Cateto Adyacente}}{\textit{Hipotenusa}}$

Reemplazamos los valores $\Rightarrow$ $\text{Coseno } (\alpha) = \dfrac{6\,cm}{10\,cm}$

Usamos la fórmula del **Coseno** porque tenemos como dato al cateto adyacente de alfa y a la hipotenusa, con esta fórmula podemos calcular alfa.

Hago la división $\Rightarrow$ $\text{Coseno } (\alpha) = 0{,}6$

Ahora al despejar el **Coseno**, pasa para el otro lado como **ArcCoseno** que es la función inversa. $\Rightarrow$ $(\alpha) = ArcCoseno\ (0{,}6) \Rightarrow \alpha = 53{,}13° \Rightarrow \alpha = 53°\ 7'\ 21''$

Para calcular el **ArcCoseno 0,6** con la calculadora pongo "0,6", aprieto la tecla "Inv" y después la tecla "Cos"
En las calculadoras más nuevas, primero aprieto "Inv", luego "Cos" y después "0,6" . Por último la tecla "=" o "Enter"

α es un ángulo y no me puede dar con coma, tengo que pasarlo a grados, minutos y segundos.
Para eso las calculadoras tienen una tecla con los símbolos de los grados, minutos y segundos
(En la mayoría de las calculadoras primero hay que apretar la tecla "Inv").

Obviamente que si ahora quiero calcular el ángulo β, voy a ir por un camino mas directo, usando la propiedad que dice que "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º "

De esta manera lo único que tengo que hacer es $\beta = 180° - 90° - 53°\ 07'\ 21''$
Entonces: $\beta = 36°\ 52'\ 49''$

Actividad 1: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

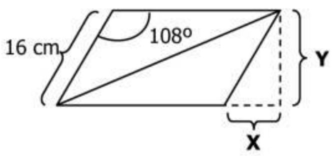
a) En un rectángulo de 35 mm de altura y 120 mm de base, se traza su diagonal. ¿Cuánto mide esa diagonal?

b) Maximiliano está remontando su barrilete. El largo del hilo desenredado es de 15,9 m. El barrilete está justo encima de su hermana, que está a 8,4 m. de distancia de él. Calcular la altura a la que está en ese momento el barrilete del piso. Maxi y su hermana miden 1, 50 m.

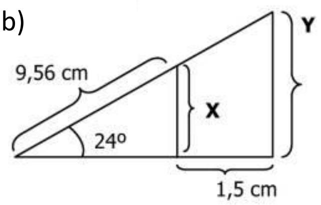
c) Mariano hace un rectángulo uniendo fósforos. Para la base usó 36 fósforos y para la altura 15. ¿Cuántos fósforos necesita para trazar la diagonal?

Actividad 2: Calcular en cada caso el valor de las incógnitas x e y, según corresponda.

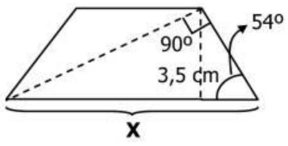
a)



b)



c)



d)