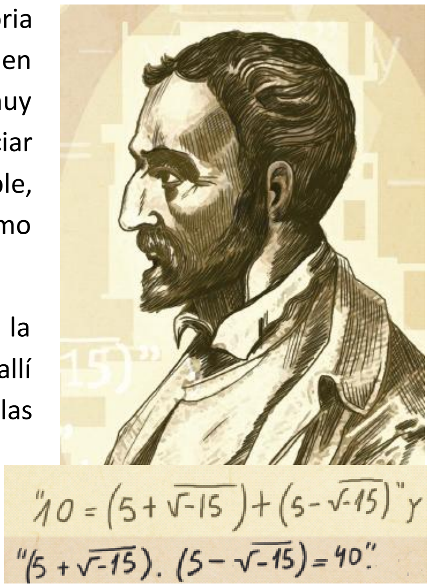
NÚMEROS COMPLEJOS



El italiano Girolamo Cardano es unos de los personajes más pintorescos de la historia de la matemática: fue médico, jugador (según dicen, algo tramposo) y pasó un buen tiempo en la prisión acusado de herejía. Pero sus hallazgos matemáticos son muy importantes y variados. Entre otros, en su *Ars Magna* propone el problema de disociar 10 en dos sumando cuyo producto sea 40. Si bien aclara que la cuestión es imposible, lo resuelve: su método le permite encontrar dos soluciones que escribe como $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$.

Esto no es más que un simple ejercicio, aunque tiene el mérito enorme de ser la primera referencia escrita a los números complejos. Claro que la historia a partir de allí no es sencilla. Tiempo después otro italiano, Bombelli, logró "dar sentido" a las expresiones de Cardano, aunque él mismo reconoció que su razonamiento era "un tanto salvaje". Más de un siglo después otro grande, el alemán Leibniz, reconoció el valor del número imaginario aunque todavía sin entenderlo del todo: en sus escritos, lo define como "una especie de anfibio entre l ser y el no ser".

Hasta el momento, hemos trabajado con el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), donde la radicación de base negativa e índice par no tiene solución en dicho conjunto, ya que no existe ningún número real que elevado a un exponente par de como resultado un número negativo.

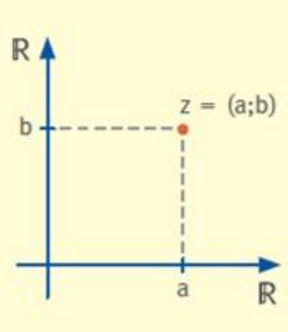
Se define entonces un nuevo número, llamado i, cuyo cuadrado es igual a -1. Es decir: $\boxed{i^2 = -1}$

Dicho número es la unidad imaginaria en el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$).

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \begin{cases} i^2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-1} = i \\ (-i)^2 = 1 . i^2 = 1 . (-1) = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-1} = -i \end{cases} \qquad \boxed{i = \pm\sqrt{-1}}$$

$$\sqrt{-4} = \pm i . \sqrt{4} = \pm 2i \qquad \sqrt{-3} = \pm i . \sqrt{3} = \pm\sqrt{3}\, i$$

Representación gráfica y expresión cartesiana de un complejo



Se define al conjunto de los **números complejos** ($\mathbb{C}$) como:

$\mathbb{C} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

A cada número complejo le corresponde un punto del plano.

$z = (a;b) \leftarrow$ Expresión cartesiana

Componente imaginario.

Componente real.

Todos los números de la forma $(a\,;0)$ son números reales y los de la forma $(0\,;b)$ son números imaginarios puros.

- Un número real es un número complejo cuya segunda componente es igual a 0: $k = (k\,;0)$.
- Un número imaginario de segunda componente igual a 1 es la unidad imaginaria: $i = (0\,;1)$.

Expresión binómica de un complejo

$z = (a\,;b) = a + bi \longrightarrow$ Expresión binómica

Parte imaginaria $Im(z)$

Parte real $Re(z)$

Ejemplos:

- ✓ $z_1 = (3\,;4) = 3 + 4i$
- ✓ $z_2 = (0\,;3) = 3i$
- ✓ $z_3 = (-1\,;1) = -1 + i$
- ✓ $z_4 = (-2\,;0) = -2$

Actividad 1: Resolver las siguientes raíces e indicar si pertenecen al conjunto de los números reales o complejos.

a) $\sqrt{-25} =$ b) $\sqrt[3]{-8} =$ c) $\sqrt{-81} =$

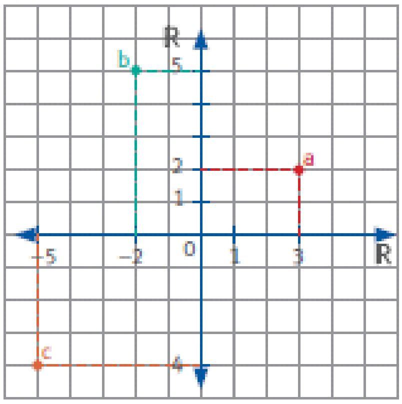
d) $\sqrt{-5} =$ e) $\sqrt[5]{-32} =$ f) $\sqrt{9} =$

Actividad 2: Resolver:

a) Representar los números complejos en un par de ejes cartesianos.

$a = (9; 7)$ $b = (15; 21)$ $c = (0; 28)$

b) Escribir la expresión binómica de cada número complejo que está representado en el par de ejes cartesianos que está a la derecha.



Actividad 3: Escribir la expresión binómica de los siguientes números complejos.

a) $(-2{,}3) =$ c) $(7; 0) =$

b) $(0; 5) =$ d) $(-1; -2) =$

Actividad 4: Escribir la expresión cartesiana de los siguientes números complejos.

a) $-3 + i =$ c) $2 - \frac{i}{2} =$

b) $-i =$ d) $3 =$