ECUACIONES CON COEFICIENTES REALES Y SOLUCIÓN COMPLEJA

Existen ecuaciones con coeficientes reales cuya solución es la raíz de índice par de un número negativo. Dichas ecuaciones no tienen solución en el conjunto de los números reales, pero sí en el de los complejos.

Las soluciones complejas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales son **complejos conjugados.**

Por ejemplo:

- $x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x=\boxed{\pm 3i}$
- $x^2-3x+8=0$

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} \Rightarrow \boxed{x_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{23}}{2}i \ \vee \ x_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{23}}{2}i}$$

Para **verificar una solución compleja**, se procede de igual manera que para las soluciones reales, es decir que se debe reemplazar la o las soluciones en la ecuación.

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{23}}{2}i\right)^2-3\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{23}}{2}i\right)+8= \quad \vee \quad \left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{23}}{2}i\right)^2-3\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{23}}{2}i\right)+8=$$

$$\frac{9}{4}+2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{23}}{2}i+\left(\frac{\sqrt{23}}{2}i\right)^2-\frac{9}{2}-3\cdot\frac{\sqrt{23}}{2}i+8= \quad \vee \quad \frac{9}{4}-2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{23}}{2}i+\left(-\frac{\sqrt{23}}{2}i\right)^2-\frac{9}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{23}}{2}i+8=$$

$$\frac{9}{4}+\cancel{\frac{3}{2}\sqrt{23}i}-\frac{23}{4}-\frac{9}{2}-\cancel{\frac{3}{2}\sqrt{23}i}+8= \quad \vee \quad \frac{9}{4}-\cancel{\frac{3}{2}\sqrt{23}i}-\frac{23}{4}-\frac{9}{2}+\cancel{\frac{3}{2}\sqrt{23}i}+8=$$

$$\frac{9}{4}-\frac{23}{4}-\frac{9}{2}+8= \quad \vee \quad \frac{9}{4}-\frac{23}{4}-\frac{9}{2}+8=$$

$$\frac{9-23-18}{4}+8= \quad \vee \quad \frac{9-23-18}{4}+8=$$

$$-\frac{32}{4}+8=0 \quad \vee \quad -\frac{32}{4}+8=0$$

Para **hallar una ecuación cuadrática,** dadas sus soluciones complejas, se aplica el mismo procedimiento que con las soluciones reales:

Sabemos que la forma factorizada de una ecuación cuadrática es $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$.

Si se quisiera encontrar la ecuación cuadrática cuyas soluciones son $x_1=5-2i \wedge x_2=5+2i$, se debe reemplazar estos valores en la forma factorizada de la ecuación cuadrática y operar.

$$[x-(5-2i)]\cdot[x-(5+2i)]=0$$

$$x^2-x\cdot(5+2i)-(5-2i)\cdot x+(5-2i)\cdot(5+2i)=0$$

$$x^2-5x-2ix-5x+2ix+25+10i-10i+4=0$$

$$x^2-10x+29=0$$

Forma polinómica de una ecuación cuadrática

ECUACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Las ecuaciones con números complejos deben resolverse aplicando las operaciones y propiedades de los mismos.

$$3z+8-zi=4i \Rightarrow z\cdot(3-i)=-8+4i \Rightarrow z=\frac{-8+4i}{3-i} \Rightarrow z=\frac{-8+4i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} \Rightarrow \boxed{z=-\frac{14}{5}+\frac{2}{5}i}$$

También pueden plantearse ecuaciones con números complejos y solución real.

Por ejemplo: *Hallar x e y reales que verifiquen:* $-3x + 5xi = y + 2 - 2yi$

- Parte real: $-3x = y + 2$
- Parte imaginaria: $5x = -2y$

Se plantea un sistema de ecuaciones para poder hallar los valores pedidos.

$$\begin{cases} -3x = y + 2 \Rightarrow y = -3x - 2 \\ 5x = -2y \Rightarrow 5x = -2\,.\,(-3x - 2) \Rightarrow 5x = 6x + 4 \Rightarrow x = -4 \wedge y = 10 \end{cases}$$