NÚMEROS IRRACIONALES

RECORDAR: Algunas propiedades de potenciación y radicación que vamos a utilizar.

Propiedad distributiva de la raíz con respecto al producto y a la división:

Con respecto al producto $\Rightarrow$ $\sqrt{15} = \sqrt{3.5} = \sqrt{3}\,.\,\sqrt{5}$ Con respecto a la división $\Rightarrow$ $\sqrt{\frac{15}{8}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{8}}$

Esto se puede leer al revés, cosa que pasa siempre cuando hay un signo "=", o sea que el producto de dos raíces (siempre que el índice de la raíz sea el mismo) se puede juntar en una sola raíz y dentro de la raíz el producto de lo que había dentro de cada una de las raíces por separado, veamos un ejemplo.

Supongamos que tenemos este producto de raíces (ambas inexactas) $\sqrt{12}\,.\,\sqrt{3}$ $\Longrightarrow$ $\sqrt{12}\,.\,\sqrt{3} = \sqrt{12\,.\,3} = \sqrt{36} = 6$

Junto las dos raíces en una. Y resuelvo fácilmente.

Cuando se **Multiplican** dos números iguales que están elevados al mismo exponente:
Los exponentes se Suman $\Rightarrow$ $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$ $\Rightarrow$ Ejemplo: $5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$

Cuando se **Dividen** dos números iguales que están elevados al mismo exponente:
Los exponentes se Restan $\Rightarrow$ $n^a \div n^b = n^{a-b}$ $\Rightarrow$ Ejemplo: $2^8 \div 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$

Cuando un número está elevado a un exponente, y el resultado está elevado a otro exponente: Los exponentes se Multiplican $\Rightarrow$ $\left(n^a\right)^b = n^{a \cdot b}$ $\Rightarrow$ Ejemplo: $\left(3^4\right)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

Simplificación de índices y exponentes

Los índices de las raíces se pueden simplificar con los exponentes de los factores que están dentro de la raíz, si son divisibles por el mismo número (**Ojo: Esto cuando la base de la raíz es positiva**)

$$\sqrt[15]{2^5} \Longrightarrow \sqrt[\cancel{15}\,3]{2^{\cancel{5}\,1}} \Longrightarrow \sqrt[3]{2}$$

Como el índice y el exponente son divisibles por 5, entonces, simplifico por 5.

Introducción de factores

A veces es conveniente y práctico para los cálculos, poder introducir los factores que están fuera de las raíces, dentro de las mismas. Veamos un ejemplo:

Tomemos el ejemplo: $5^3\ \sqrt[2]{5}$

Primero escribimos la expresión como: $5^3\ \sqrt[2]{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5\ \sqrt[2]{5}$

Luego como sabemos que 5^2 es 25 y que la raíz de 25 es 5, podemos decir que: $5 = \left|\sqrt[2]{5^2}\right|$
Las barras del módulo las escribimos para referirnos al valor absoluto simplemente

Entonces, en la expresión anterior, podemos remplazar a los números 5 que están fuera de la raíz por las raíces cuadradas de 5 al cuadrado (En este caso, como remplazamos en la expresión un valor positivo, las barras del valor absoluto podemos obviarlas)

Entonces nos quedaría: $5^3\ \sqrt[2]{5} = 5\cdot 5\cdot 5\ \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5}$

Y luego podemos aplicar la propiedad recíproca de la distributiva respecto al producto y juntar todo en una sola raíz, con lo cual nos quedaría: $5^3\ \sqrt[2]{5} = 5\cdot 5\cdot 5\ \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2\cdot 5^2\cdot 5^2\cdot 5}$

Y por último, dentro de la raíz, podemos aplicar la propiedad de "Producto de potencias de Igual Base"
Y nos quedaría: $5^3\ \sqrt[2]{5} = 5\cdot 5\cdot 5\ \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2\cdot 5^2\cdot 5^2\cdot 5} = \sqrt[2]{5^7}$

Existe un método FÁCIL para poder introducir factores dentro de la raíz. Veamos cómo se resuelve el ejemplo anterior con este método:

$$5^3\ \sqrt[2]{5} \Rightarrow 5^3\ \sqrt[2]{5} \Rightarrow \sqrt[2]{5\ 5^6} \Rightarrow \sqrt[2]{5^1\ 5^6} \Rightarrow \boxed{\sqrt[2]{5^7}}$$

Multiplicamos el exponente con el índice: 3 . 2 = 6

Adentro sumamos los exponentes porque son potencia de la misma base

Otro ejemplo: $2^5\ \sqrt[3]{2} = \Rightarrow 2^5\ \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2\ .\ 2^{15}} \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{2^{16}}}$

5 . 3 = 15

Extracción de factores

Existen factores, dentro de un radical, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o a lo sumo igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse las propiedades de la potenciación y radicación.

Ejemplo: Extraigamos los factores de $\sqrt[3]{2^{13}}$

Primero escribimos: $\sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}$

Luego vamos agrupando en grupos de 3: $\sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot 2}$

Luego escribimos 2.2.2 como 2 al cubo: $\sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 2} \Rightarrow \sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}$

Luego de la propiedad distributiva, resolvemos: $\sqrt[3]{2^{13}} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt[3]{2} = 2^4\cdot\sqrt[3]{2}$

Veamos otro ejemplo un poco más complejo:

$\sqrt[3]{16x^8} = \sqrt[3]{2^4\cdot x^6\cdot x^2} \longrightarrow$ $16 = 2^4$ y $x^8 = x^{6+2} = x^6\cdot x^2$ (por propiedad de potenciación)

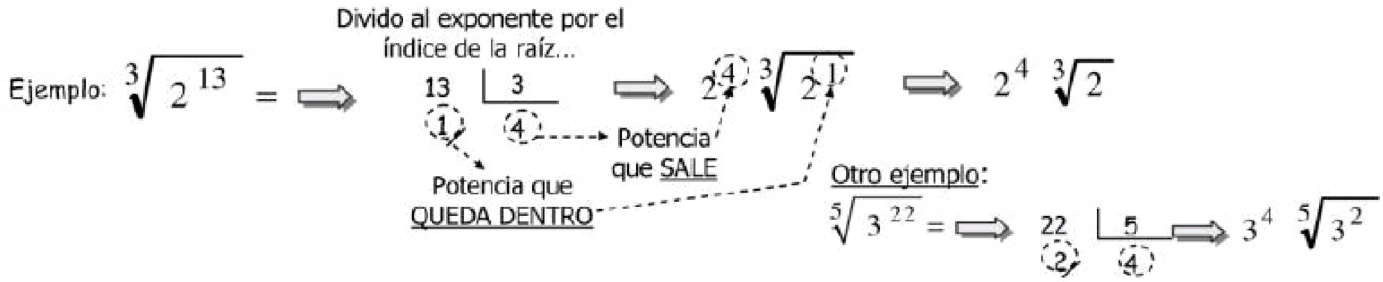
$= \sqrt[3]{2\cdot 2^3\cdot x^3\cdot x^3\cdot x^2} \longrightarrow$ Como el índice de la raíz es 3, utilizamos factores que tengan exponentes igual a 3

$= \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2} \longrightarrow$ Por propiedad de radicación, se distribuye

$= \sqrt[3]{2}\cdot 2\cdot x\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2} \longrightarrow$ Se simplificaron los índices de las raíces con los exponentes

$= \mathbf{2x^2\sqrt[3]{2x^2}} \longrightarrow$ Se reacomoda y se utiliza la propiedad de radicación para que quede todo dentro de una misma raíz

Existe un método FÁCIL para extraer factores de la raíz.



Actividad 1: Extraer o introducir factores del radical. Simplificar índices y exponentes si es posible.

a) $\sqrt{32} =$

b) $\sqrt[3]{0{,}125} =$

c) $8a \cdot \sqrt{a} =$

d) $7b^3 \cdot \sqrt[3]{7b^2c} =$

e) $3b \cdot \sqrt[4]{3a^3b^3} =$

f) $\sqrt{\frac{27c^5}{343}} =$