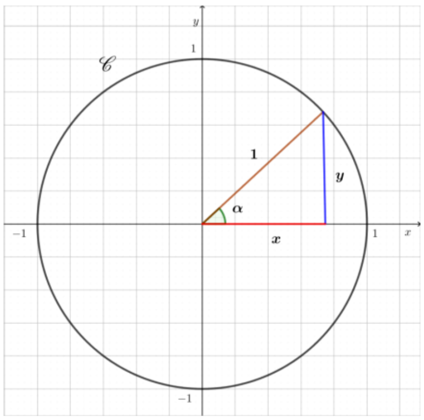
Circunferencia Trigonométrica

Es una circunferencia de radio 1, normalmente con su centro en el origen $(0;0)$ de un sistema de coordenadas, de un plano euclídeo o complejo.

Se utiliza con el fin de poder estudiar fácilmente las razones trigonométricas, mediante la representación de triángulos rectángulos auxiliares.



Por Teorema de Pitágoras:

$x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow$ donde 1 es la hipotenusa, que es el radio de la circunferencia $\mathcal{C}$

Luego, podemos determinar las principales funciones trigonométricas que se pueden representar como la razón de segmentos asociados a triángulos rectángulos auxiliares de la siguiente manera:

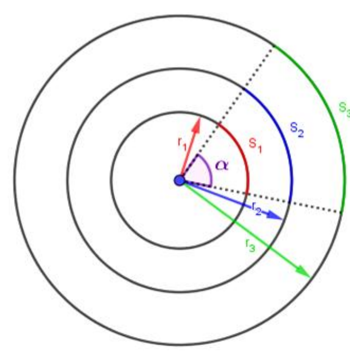
- $sen\ \alpha = \frac{op}{hip} = \frac{y}{1} \Longrightarrow \boxed{sen\ \alpha = y}$
- $\cos\ \alpha = \frac{ady}{hip} = \frac{x}{1} \Longrightarrow \boxed{\cos \alpha = x}$
- $tg\ \alpha = \frac{op}{ady} = \frac{y}{x} \Longrightarrow \boxed{tg\alpha = \frac{y}{x}}$

Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física, astronomía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, entre otros usos.

El número π es la relación que existe entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia, es decir $\boxed{\pi = \frac{Perímetro\ de\ \mathcal{C}}{Diámetro\ de\ \mathcal{C}}}$

El sistema circular de medición de ángulos

El ángulo central $\hat{\alpha}$ determina los arcos S_1, S_2 y S_3, directamente proporcionales a los radios r_1, r_2 y r_3, respectivamente. Esto permite tomar como **medida del ángulo $\hat{\alpha}$** el cociente, en cada circunferencia, entre la medida del arco y del radio.



$\hat{\alpha}$ (en radianes) $= \frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \frac{S_3}{r_3}$

La unidad en este sistema es el **radián:** $\hat{\alpha}$ mide 1 radián cuando la longitud del arco, S, es igual al radio, **r**, de la circunferencia.

Cuando $S = 2\pi r$, entonces el ángulo de 1 giro mide 2π.

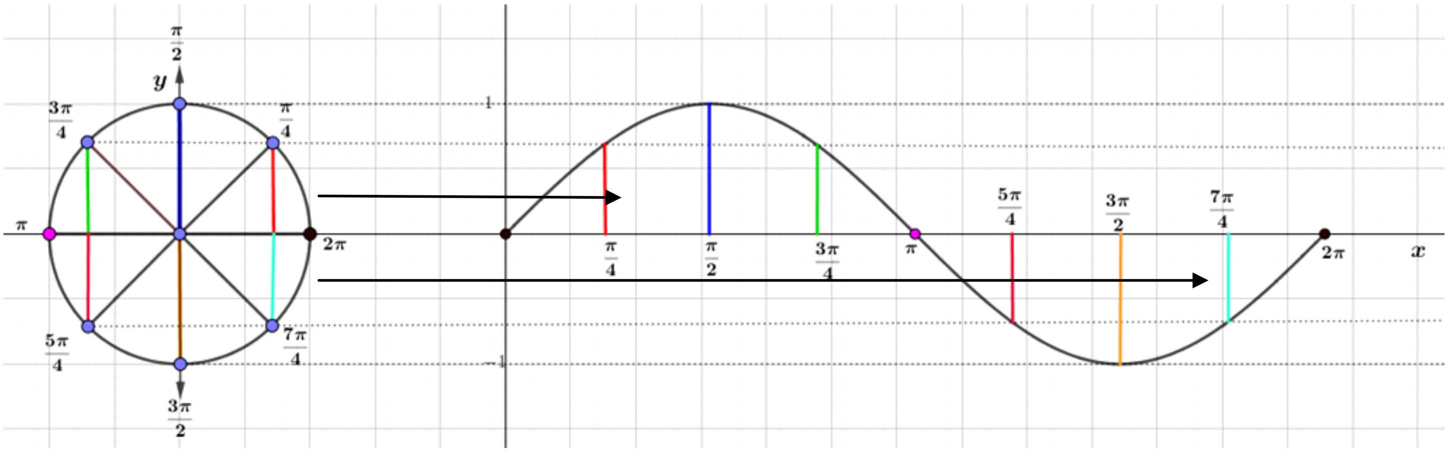
Para transformar cualquier medida de grados a radianes, y viceversa, podemos utilizar la siguiente proporción:

$$\boxed{\frac{\hat{\alpha}\ \text{(en grados)}}{180°} = \frac{\hat{\alpha}\ \text{(en radianes)}}{\pi}}$$

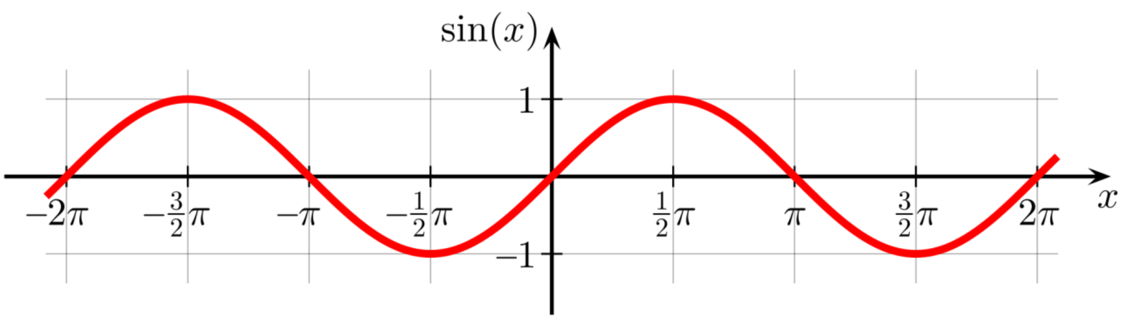
Es habitual que los ángulos en radianes se dejen expresados como expresiones de π, ya que esta es la medida exacta del ángulo. Por ejemplo: $-30° = -\frac{\pi}{6}$.

Función Seno

En la siguiente figura se observa la relación entre la circunferencia unitaria y la gráfica de la función seno del ángulo x que comienza en 0 y termina en 2π (incrementos de $45° = \frac{\pi}{4}$ en este caso).



Observemos ahora el siguiente gráfico de la función seno que tiene como dominio al conjunto de los números reales.



- ✓ La función seno, $f(x) = sen(x)$, tiene por dominio al conjunto de los números reales, es decir $Dom(f) = \mathbb{R}$. Y por imagen al intervalo $[-1; 1]$.
- ✓ El seno siempre es menor o igual a 1 y mayor o igual a -1.
- ✓ Es una función continua y periódica, cuyo período es 2π. OBSERVAR QUE: $\boxed{sen(x + 2\pi) = sen(x)}$
- ✓ Es una función impar, es decir $\boxed{sen(-x) = -sen(x)}$
- ✓ Si observamos un período, por ejemplo $[0; 2\pi]$, podemos decir que:
  - f es creciente en los intervalos $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.
  - f es decreciente en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$.
- ✓ Como los valores del seno siempre varían entre 1 y -1, la altura mayor que alcanza la onda es 1. Se dice entonces que la amplitud de la onda es 1.

IMPORTANTE:

- Llamamos **período** a la longitud de un ciclo que se repite.
- Llamamos **frecuencia** a la cantidad de veces que se repite un período en un intervalo.
- Llamamos **amplitud** a la altura que alcanza la onda.

Transformaciones de la función seno

Para cada caso realiza los gráficos de las funciones obtenidas a partir de modificaciones de $f(x) = Asen(Bx + C) + D$, completa las tablas e indica los cambios observados:

a) La función $f(x) = Asen(x)$

Función	**A**	**Conjunto Imagen**
$f(x) = sen(x)$		
$g(x) = 2sen(x)$		
$h(x) = \frac{1}{2}sen(x)$		
$j(x) = -3sen(x)$		

b) La función $f(x) = sen(Bx)$

Función	**B**	**Período (T)** $\left(T = \frac{2\pi}{\lvert B \rvert}\right)$
$f(x) = sen(x)$		
$g(x) = sen(2x)$		
$h(x) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$		

c) La función $f(x) = sen(x + C)$

Función	**C**	**Ángulo de fase φ** $\left(\text{si } b \neq 1 \Rightarrow \varphi = -\frac{C}{B}\right)$
$f(x) = sen(x)$		
$g(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$		
$h(x) = sen\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$		

d) La función $f(x) = sen(x) + D$

Función	**D**	**Conjunto Imagen**
$f(x) = sen(x)$		
$g(x) = sen(x) + 1$		
$h(x) = sen(x) - 2$		