FUNCIONES POLINÓMICAS

Son funciones de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde n es un número entero positivo, llamado grado del polinomio.

DOMINIO: Está formado por aquellos valores de x ($\mathbb{R}$) para los que se puede calcular la imagen de $f(x)$.

IMAGEN: Está formado por todos los valores que puede llegar a tomar la función.

- $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1$ y $g(x) = 5x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 2$ son funciones polinómicas. El grado de f es 4 y se nota $gr(f) = 4$; y el $gr(g) = 5$.
- El dominio de una función polinómica **siempre** es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.
- Las funciones polinómicas son **continuas.**

El **conjunto de ceros** (C^0) de una función está formado por los ceros o raíces. Es decir:

$$\boxed{C^0 : x \in Dom(f) \wedge f(x) = 0}$$

El **conjunto de positividad** (C^+) de una función está formado por todos los valores del dominio para los cuales la función es positiva. Es decir:

$$\boxed{C^+ : x \in Dom(f) \wedge f(x) > 0}$$

El **conjunto de negatividad** (C^-) de una función está formado por todos los valores del domio para los cuales es negativa. Es decir:

$$\boxed{C^- : x \in Dom(f) \wedge f(x) < 0}$$

Por lo tanto, podemos decir que el dominio de una función está formado por la unión de los conjuntos de positividad (C^+), negatividad (C^-) y de ceros (C^0). Es decir, $\boxed{\boldsymbol{Dom(f) = C^+ \cup C^- \cup C^0}}$

Ejemplo:

Hallar los conjuntos de ceros, positividad y negatividad de $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$

Para hallar el conjunto de ceros, es necesario resolver la ecuación $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$.

Por el Teorema de Gauss, sabemos que las posibles raíces son: ± 1, ± 2, ± 4 y ± 8.

Utilizando el Teorema del Resto, podemos ver que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 0 \\ f(-2) = 0 \\ f(-4) = 0 \end{array}\right\}$$ Es decir que las raíces son: $-1, -2$ y -4. Luego, $f(x) = (x+1)(x+2)(x+4)$.

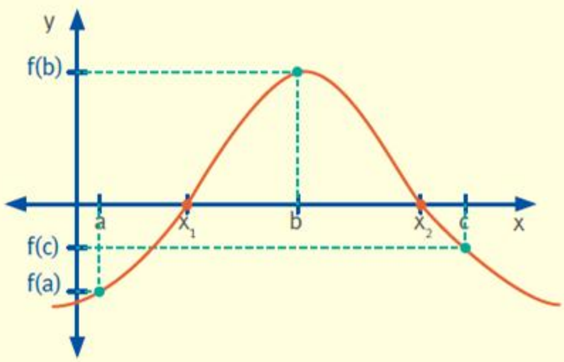
Por lo tanto, $\boldsymbol{C^0} = \{\boldsymbol{-4};\ \boldsymbol{-2};\ \boldsymbol{-1}\}$

Para obtener el conjunto de positividad, es necesario resolver la inecuación $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 > 0$; y el de negatividad, $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 < 0$.

Como se dijo anteriormente, las funciones polinómicas son continuas. Debido a esto, si en una función continua la imagen de un valor tiene signo distinto que la imagen en otro valor, obligatoriamente el gráfico pasará por el eje x, es decir, valdrá 0. Esto se lo conoce como el **TEOREMA DE BOLZANO.**

Teorema de Bolzano

Si una función f(x) es continua en un intervalo de su dominio, y tiene distinto signo en los extremos del mismo, entonces la función tiene por lo menos una raíz real en ese intervalo.



$f(a) < 0 \wedge f(b) > 0 \Rightarrow f(x_1) = 0 \wedge x_1 \in (a;b)$

$f(b) > 0 \wedge f(c) < 0 \Rightarrow f(x_2) = 0 \wedge x_2 \in (b;c)$

Una consecuencia del Teorema de Bolzano, permite afirmar que si en una función polinómica se conocen **todas** sus raíces, la función no cambiará de signo entre ellas. Debido a esto, si se conocen las raíces de $f(x)$, alcanza con saber el signo de un sólo elemento en cada intervalo que ellas determinan para saber el signo de la función en dicho intervalo.

Siguiendo con el ejemplo, se tiene que:

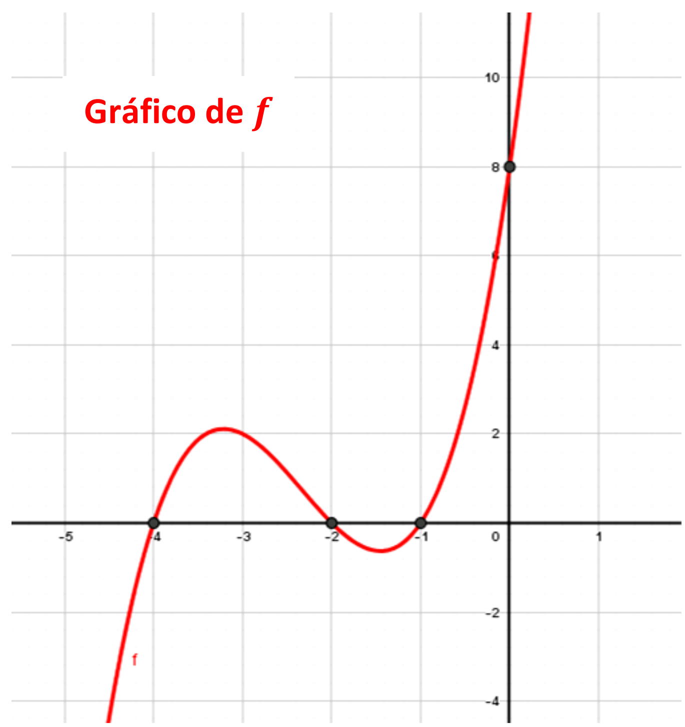
$(-\infty;\ -4)$	-4	$(-4;\ -2)$	-2	$(-2;\ -1)$	-1	$(-1;\ +\infty)$
$f(-5) = -12$ $-$	0	$f(-3) = 2$ $+$	0	$f(-1{,}5) = -0{,}625$ $-$	0	$f(0) = 8$ $+$

Por lo tanto,

$\boldsymbol{C^+} = (-\mathbf{4};\ -\mathbf{2}) \cup (-\mathbf{1};\ +\boldsymbol{\infty})$

$\boldsymbol{C^-} = (-\boldsymbol{\infty};\ -\mathbf{4}) \cup (-\mathbf{2};\ -\mathbf{1})$

$\boldsymbol{O.O}: \boldsymbol{y} = \mathbf{8}$



Actividad:

Dadas las siguientes funciones polinómicas, hallar C^0, C^+ y C^- . Realizar un gráfico aproximado de cada una de ellas.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
b) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$
c) $h(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

<u>IMPORTANTE</u>: No olvides justificar.