FUNCIONES POLINÓMICAS

Una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, siendo n un número natural y $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$, números reales, es una función polinómica.

- Si $a \neq 0$, entonces la función es de **grado n.**
- El **dominio** de las funciones polinómicas es el conjunto de los **números reales.**
- Las funciones polinómicas son **continuas.**

Función	Grado
$f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 10$	4
$g(x) = 9x^3 - 4$	3
$h(x) = 5x + 4$	1
$j(x) = 46$	0

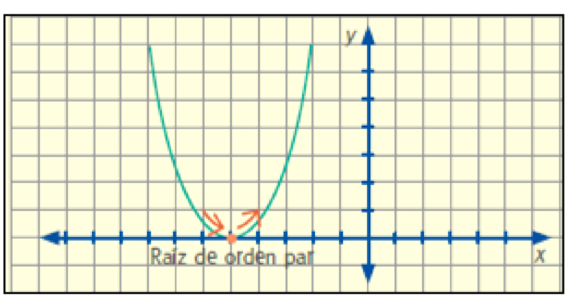
Se llama **orden de multiplicidad** de una raíz a la cantidad de veces que esa raíz se repite como tal. Para determinar el comportamiento de una función polinómica respecto del eje x, se debe conocer la forma factorizada de la función, $f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)$ y determinar el orden de multiplicidad de sus raíces.

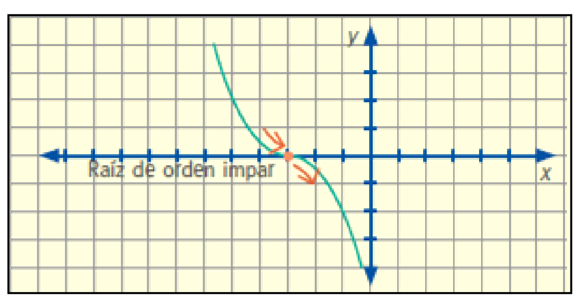
Una función tiene una **raíz múltiple** si hay factores iguales en su descomposición en función de sus raíces; el orden de multiplicidad de la misma está dado por el exponente del factor.

Función Factorizada	Raíces	Multiplicidad
$f(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+3)$	$x_1 = 1 \wedge x_2 = -1 \wedge x_3 = -3$	Tres raíces simples.
$g(x) = (x-1) \cdot (x-1) = (x-1)^2$	$x_1 = x_2 = 1$	Una raíz doble.
$h(x) = (x+2) \cdot (x+2) \cdot (x+2) = (x+2)^3$	$x_1 = x_2 = x_3 = -2$	Una raíz triple.
$j(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)$	$x_1 = x_2 = 2 \wedge x_3 = -1$	2, raíz doble y -1, raíz simple.
$k(x) = (x-4)^2 \cdot (x+5)^3$	$x_1 = x_2 = 4 \wedge x_3 = x_4 = x_5 = -5$	4, raíz doble y -5, raíz triple.

Gráficamente:

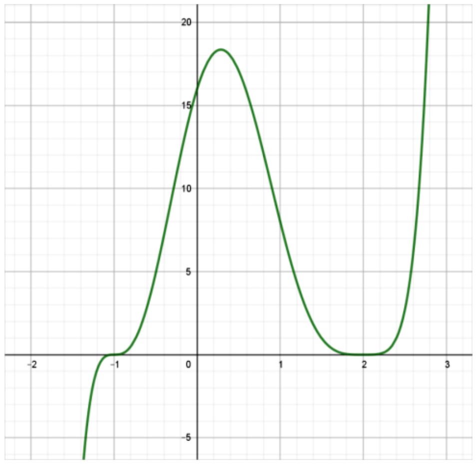
- Si el **orden de multiplicidad** de la raíz es **par,** la gráfica de la función toca el eje x, pero no lo atraviesa.
- Si el **orden de multiplicidad** de la raíz es **impar**, la gráfica de la función atraviesa el eje x.





RECORDAR QUE las raíces se ubican en el eje x y la ordenada al origen, en el eje y.

Ejemplo: Observar el siguiente gráfico y hallar una función que lo describa (notar que la escala del eje x es de 1 en 1 y la escala del eje y es de 5 en 5).



Datos que podemos obtener del gráfico:

- $C^0 = \{-1; 2\}$
- $f(0) = 16$
- -1 es una raíz de multiplicidad impar, ya que el gráfico "corta" al eje x.
- 2 es una raíz de multiplicidad par, ya que el gráfico "rebota" en el eje x.

Entonces, $f(x) = (x+1)^3 \cdot (x-2)^4$ es una posible factorización de la función que estamos buscando.

Veamos si estamos en lo correcto.

La expresión general de una función factorizada es $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n)$.

Sabemos que -1 es una raíz de multiplicidad impar y que 2 es una raíz de multiplicidad par, entonces podemos proponer que -1 es una raíz triple y 2 es una raíz doble (podríamos haber elegido otras opciones y así obtener otra función). Luego, $f(x) = a \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^4$.

Para hallar el valor de a, utilizaremos el dato que tenemos sobre la ordenada, es decir $f(0) = 16$, donde $x = 0$ e $y = 16$. Reemplazando no queda:

$$f(0) = a \cdot (0+1)^3 \cdot (0-2)^4$$

$$16 = a \cdot (1)^3 \cdot (-2)^4$$

$$16 = a \cdot 1 \cdot 16$$

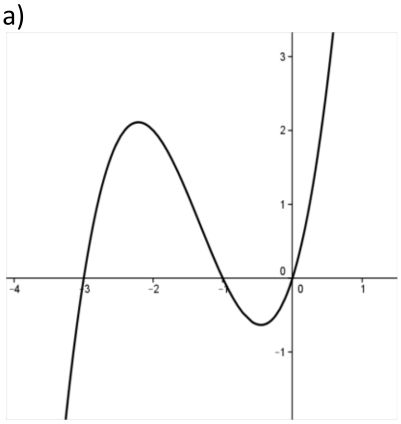
$$16 = a \cdot 16$$

$$\frac{16}{16} = a \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{a = 1}}$$

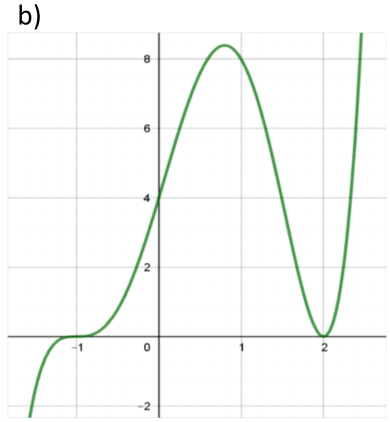
Por lo tanto, $f(x) = (x+1)^3 \cdot (x-2)^4$ es una función que describe al gráfico dado.

Actividad: Hallar una función que describa los gráficos dados.

a)



b)



c)